

الإمتحان السداسي الأول في مقياس التحليل العددي 2

قسم: تكنولوجيا المدة: ساعتان سنة أولى جذع مشترك تكنولوجيا

التمرين الأول (Questions de cours) (04 نقاط):

لتكن المعادلة $f(x) = 0$ ، حيث f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a, b]$ تحقق الشرط: $f(a).f(b) < 0$. إذا كانت

$$f(x) = 0 \iff x = g(x).$$

و g دالة تكرارية و مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$.

(1) ماهي شروط تقارب نظرية النقطة الثابتة؟

(2) متى يكون التقارب سريع؟

(3) إذا كانت g تحقق شروط تقارب نظرية النقطة الثابتة و $\forall n \in \mathbb{N}^* : |x_{i+1} - x_i| \leq M^n |x_1 - x_0|$ برهن أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |x_n - \bar{x}| \leq \frac{M^n}{1-M} |x_1 - x_0|.$$

حيث: $\bar{x}$ هو حل للمعادلة.

التمرين الثاني (Micro) (07 نقاط):

(1) أستخدم كلا من قاعدة شبه المنحرف و قاعدة سامسون لحساب قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)$$

حيث تعطى بيانات الدالة f في الجدول الآتي:

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	0,25882	0,5	0,70711	0,86603	0,96593	1

(2) إذا علمت أن البيانات السابقة هي بيانات الدالة $f(x) = \sin x$ ، فأحسب التكامل المضبوط I_{Exact} ثم أحسب الخطأ الفعلي لكل طريقة.

(3) أوجد قيمة طول الخطوة h لكل طريقة، علما أن الخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0.5 \times 10^{-5}$

ملاحظة: الحسابات تقرب إلى 10^{-6} .

التمرين الثالث (09 نقاط):

لتكن المعادلة غير الخطية التالية:

$$f(x) = 4x - \cos x - 2 = 0 \quad (x \text{ يعطى بالراديان}) \quad (1)$$

- (1) أثبت أن المعادلة (1) تقبل جذرا وحيدا α في المجال $[0, 2]$.
- (2) هل تتقارب الصيغة التكرارية التالية (طريقة النقطة الثابتة) نحو الجذر α مبتدئين بأي قيمة $x_0 \in [0, 2]$ ولماذا؟

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x_n. \quad (2)$$

- (3) أوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على الجذر α مبتدئا بالقيمة $x_0 = 1$ ، علما أن الخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 10^{-3}$.
- (4) أحسب قيمة الجذر α بنفس الدقة السابقة مبتدئا بتلك القيمة الابتدائية $x_0 = 1$ (7 أرقام بعد الفاصلة).

- (5) أعد حل السؤال (2) مستخدما الصيغة التكرارية التالية:

$$x_{n+1} = 5x_n - \cos x_n - 2. \quad (3)$$

بالتوفيق

تصحيح الامتحانات الأساس الأول

في مقياس التحليل العددي 2

طال التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) شروط تقارب زغرية النقطة الثابتة:

* وجود عدد مقياس موجب M بحيث:

$$\forall n \in [a, b]: |g'(n)| \leq M < 1$$

$$\forall n \in [a, b]: g([a, b]) \subset [a, b]$$

(2) إذا كانت $|g'(n)| \rightarrow 0$ في المجال $[a, b]$ ، فإن: طريقة النقطة الثابتة

تتقارب بسرعة.

$$(3) \text{ المبرهنات على أن: } \forall n \in \mathbb{N}^*: |u_n - \bar{u}| \leq \frac{M^n}{1-M} |u_1 - u_0|$$

لدينا حسب العلاقة: $\forall n \in \mathbb{N}^*: |u_{n+1} - u_n| \leq M^n |u_1 - u_0|$
نلاحظ أنه من أجل: $n > m > 1$

$$|u_m - u_n| = |u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + u_{m-2} - u_{m-3} + \dots + u_{n+1} - u_n|$$

$$|u_m - u_n| \leq |u_m - u_{m-1}| + |u_{m-1} - u_{m-2}| + \dots + |u_{n+1} - u_n|$$

$$\leq M^{m-1} |u_1 - u_0| + M^{m-2} |u_1 - u_0| + \dots + M^n |u_1 - u_0|$$

$$\leq M^n (M^{m-n-1} + M^{m-n-2} + \dots + 1) |u_1 - u_0|$$

في عدد متناهي في المبرهنات في المبرهنات
وعدد الحدود $m-n$ هو

$$|u_m - u_n| \leq \frac{M^n}{1-M} |u_1 - u_0|.$$

فما $m \rightarrow +\infty$ فإن: $u_m \rightarrow \bar{u}$

والمبرهنات:

$$|u_n - \bar{u}| \leq \frac{M^n}{1-M} |u_1 - u_0|$$

طال التمرين الثاني: (07 نقاط)

(1) طريقة شبه المبرهنات:

$$I_t = \frac{h}{2} (y_0 + 2 \sum_{i=1}^5 y_i + y_6) = \frac{\pi/12}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + y_6)$$

$$I_t = \frac{\pi}{24} \left[0 + 2 \left(0,25882 + 0,5 + 0,70711 + 0,86603 + 0,96593 \right) + 1 \right]$$

$$= 0,994285 \quad (0,5)$$

$m = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$: طريقة رنجه

$$I_s = \frac{h}{3} \left[y_0 + y_{2m} + 2 \sum_{i=2}^m y_{2i-2} + 4 \sum_{i=1}^m y_{2i-1} \right] \quad (0,5)$$

$$= \frac{h}{3} \left[y_0 + y_6 + 2 \sum_{i=2}^3 y_{2i-2} + 4 \sum_{i=1}^3 y_{2i-1} \right]$$

$$= \frac{\pi}{36} \left[y_0 + y_6 + 2(y_2 + y_4) + 4(y_1 + y_3 + y_5) \right] \quad (0,5)$$

$$= \frac{\pi}{36} \left[0 + 1 + 2(0,5 + 0,86603) + 4(0,25882 + 0,70711 + 0,96593) \right]$$

$$= 1,000030 \quad (0,5)$$

(1) $I_{\text{exact}} = \int_2^{\pi/2} \sin u = \left[-\cos u \right]_2^{\pi/2} = 1$: حساب الخطأ الفعلي (2)

* طريقة رنجه المكثف

$$e_t = |I_{\text{exact}} - I_t| = |1 - 0,994285| = 0,005715 \quad (0,5)$$

* طريقة رنجه المكثف

$$e_s = |I_{\text{exact}} - I_s| = |1,000030 - 1| = 0,000030 \quad (0,5)$$

(3) حساب الخطأ لـ $f^{(4)}$: طريقة رنجه المكثف

$$f^{(2)}(u) = -\sin u, \quad f^{(4)}(u) = \sin u$$

$$e_t = (b-a) \frac{h^2}{12} f''(\xi) \leq (1-0) \frac{h^2}{12} \left(\frac{\pi}{2} \right) \leq 5 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \boxed{h \leq 0,006} \quad (1)$$

* طريقة رنجه المكثف

$$e_s = (b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \leq (1-0) \frac{h^4}{180} \left(\frac{\pi}{2} \right) \leq 5 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \boxed{h \leq 0,15} \quad (1)$$

حل التمرين الثالث (09 نقاط)

$$f(x) = 4x - \cos x - 2 = 0 \quad \dots (1)$$

(1) f معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ (0,25)

$$\begin{cases} f(0) = -3 < 0 & (0,25) \\ f(2) = 6,416147 > 0 & (0,25) \end{cases} \Rightarrow f(0) \times f(2) < 0 \quad (0,25)$$

$$f'(x) = 4 + \sin x > 0, \quad \forall x \in [0, 2] \quad (0,5)$$

وبالتالي : الدالة f متزايدة تماماً (رتبة تماماً) (0,25)
وحسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة (1) تقبل جذراً وحيداً α في المجال $[0, 2]$ (0,5)

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x \quad (2)$$

تكون الصيغة التكرارية (2) متقاربة إذا حققت الدالة g الشرطين :
(أ) $g([0, 2]) \subset [0, 2]$ ؟

$$(0,5) \quad g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{4} \sin x \Rightarrow g'(x) < 0, \quad \forall x \in [0, 2]$$

وبالتالي : الدالة g متناقصة تماماً (رتبة تماماً) (0,25)

$$g([0, 2]) = [g(2); g(0)] = [0,40; 0,75] \subset [0, 2] \quad (0,25)$$

وبذلك : $g([0, 2]) \subset [0, 2]$ (0,25)

$$(ii) \quad \exists M > 0 : |g'(x)| \leq M < 1 \quad ?$$

$$g'(x) = -\frac{1}{4} \sin x \Rightarrow |g'(x)| = \frac{1}{4} |\sin x| \leq \frac{1}{4} < 1 \quad (0,75)$$

$$\exists M = \sup |g'(x)| = \frac{1}{4} \quad (0,25)$$

(0,25) وحسب (أ) و (ii) فإن الصيغة التكرارية (2) متقاربة نحو الجذر α .

(3) إيجاد عدد التكرارات اللازمة n :

$$(0,5) \quad \text{لدينا : } |x_1 - x_0| \leq \frac{M^n}{1-M} \leq \varepsilon \quad \text{حيث : } |x_1 - x_0| \leq \frac{M^n}{1-M}$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos(1) = 0,6350756. \quad (0,25)$$

(3)

بالقوس، جذأت :

$$n \geq \ln \frac{\varepsilon(1-M)}{|u_1 - u_0|} / \ln M \Rightarrow n \geq \ln \frac{1 \times 10^{-3} (1 - \frac{1}{4})}{|0,6350756 - 1|} / \ln \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow n \geq \ln \frac{3/4 \times 10^{-3}}{0,364925} / \ln \frac{1}{4} = 4,46$$

$$\boxed{n=5} \quad (0,5)$$

4) لعل قارة الكد، د

$$u_1 = 0,6350756$$

$$u_2 = g(u_1) = 0,7012567 \quad (0,25)$$

$$u_3 = g(u_2) = 0,6910080 \quad (0,25)$$

$$u_4 = g(u_3) = 0,6926510 \quad (0,25)$$

$$u_5 = g(u_4) = 0,6923890 \quad (0,25)$$

$$g(u) = 5u - \cos u - 2 \quad (5)$$

$$g(u) = 5u - \cos u - 2 \Rightarrow g'(u) = 5 + \sin u \Rightarrow |g'(u)| > 1, \forall u \in [0, 2] \quad (0,5)$$

و L الصفة (3) متباينة (0,25)